Thomas Royar

Mathe ist doof !?

Weshalb ganz vernünftige Menschen manchmal an Mathematik verzweifeln

(Auszug)

Der Volltext ist erhältlich als e-book-download bei amazon.de

Vorwort

„Mathe ist doof!“ ist sicher ein Stoßseufzer, dem viele zustimmen dürften. Da ich nun berufsbedingt schon sehr viele Menschen mit Mathe „gequält“ habe, habe ich diese Aussage schon mehr als einmal gehört.

Obwohl mir Mathematik meistens Spaß macht und ich Mathe ganz und gar nicht doof finde, habe ich mir oft Gedanken gemacht, weshalb das wohl so ist. Manches war mir nicht weiter rätselhaft, manches hat sich mir erst im Lauf der Jahre erschlossen. Besonders auch durch die eigene Beschäftigung mit dem Phänomen „Rechenschwäche“ wurde mir dabei mehr und mehr bewusst, dass besonders auch die scheinbar so „einfachen“ mathematischen Operationen äußerst komplex und schwierig sind, wenn man sie wirklich tiefer gehend verstehen will. Gleichzeitig kann man aber ziemlich lange einigermaßen „erfolgreich“ in der Schulmathematik bestehen, ohne dass sich einem die Mathematik selbst wirklich erschließt.

Zur Freude vieler Mathematikliebhaber rollte und rollt die „Sudoku“-Welle über unser Land. Der Erfolg dieser intelligenten Zahlenrätsel zeigt, dass man mit Mathematik tatsächlich Massen begeistern kann – so, wie das auch in den 80er Jahren mit dem legendären „Zauberwürfel“ der Fall war. Doch was entdeckte ich dazu in einem Supermarkt? Dort wurden kleine elektronische Sudoku – Spiele angeboten mit folgendem Werbetext: „Lösen Sie die faszinierenden Rätsel durch reine Logik – ohne Mathematik“!

Wie sehr muss der Ruf der Mathematik lädiert sein, wenn man sie so sehr verleugnet! Dabei sind die Sudokus Mathematik in Reinkultur. „Lernen Sie die Weltsprache des 21. Jahrhunderts, die Sprache Shakespeares, Lockes, Wildes und Twains – ohne Englisch!“ – diesen Schwachsinn würde jeder sofort als solchen entlarven.

Es ist also Zeit, nach Gründen für den schlechten und so ungerechten Ruf der Mathematik zu suchen und einige Suchergebnisse zu veröffentlichen!

Die Frage, die sich mir stellte, als ich auf die Idee kam, einige zum Verstehen dieser Zusammenhänge hilfreichen Fakten in einem Buch zusammenzutragen, war: In welcher Form soll das geschehen?

Um das Buch für jederfrau und –mann lesbar zu gestalten, habe ich mich für den Erzählstil entschieden und gleichzeitig darum bemüht, inhaltlich nicht zu verflachen. Natürlich kann es dabei der Fall sein, dass einzelne Passagen Fachleuten zu banal, andere Laien immer noch „zu mathematisch“ sind, aber trotzdem bin ich zuversichtlich, dass vieles von dem, was auf den nächsten Seiten steht, sowohl für interessierte Laien als auch für zukünftige und aktuelle Mathematiklehrerinnen und –lehrer unterhaltsam, interessant und auch relevant ist.

Mein Dank gilt vor allem meinen Schülern – von den Erstklässern über die Hauptschüler, Studenten bis zu den Lehrern in der Fortbildung – die mir mit ihren klugen Fragen (die sie oft selbst entschuldigend als „dumme Fragen“ bezeichnet haben) regelmäßig die Augen geöffnet und das Schwierige im vermeintlich so Einfachen offenbart haben.

Den Hintergrund für die Auswahl der mutmaßlichen mathematischen Gemeinheiten bildet eine zehnjährige Lehrertätigkeit an Grund- und Hauptschulen und eine mehrjährige Erfahrung als Lehrerausbilder in der ersten (Hochschule), zweiten (Vorbereitungsdienst) und dritten (berufsbegleitende Fortbildung) Phase.

Wozu denn dieses Mathe?

Jean Le Rond d’Alembert, der große französische Mathematiker und Philosoph des 18. Jahrhunderts, war so angetan von der Mathematik, dass er sie als ein Geschenk an die Menschheit empfand:

„Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.“

Wie zynisch muss das klingen in den Ohren der Vielen, bei denen der Gedanke an die Mathematik gänzlich andere Assoziationen weckt. Ein Spielzeug? Trost? Unterhaltung? Handelt es sich nicht vielmehr um ein Folterwerkzeug, das die Schule den Lehrern zuwarf zum Schrecken und zur Disziplinierung? Eine Welt des Schreckens, deren abgrundtiefe Gemeinheit noch zusätzlich darin besteht, dass sie für uns alle auch lebensnotwenig sein soll – wir also für erlittene Qualen dankbar sein sollten! Die Mathematiklehrer als Inquisitoren, bedacht auf unser Seelenheil – mit Daumenschrauben und ähnlich unterhaltsamen Gerätschaften als Spielzeug und der mathematischen Absolution in Form bestandener Prüfungen als Trost?

Zugegeben: Jedem wird schnell klar, dass an der Behauptung, Mathematik sei auch außerhalb der Schule nützlich, etwas dran sein muss – wenigstens gilt das für denjenigen Teil der Mathematik, den wir alle noch problemlos verstanden zu haben glauben, also so etwa den Stoff der Grundschule. Mit zunehmender Kompliziertheit der Materie wird die Zahl der Menschen, die jene Bereiche der Mathematik ebenfalls noch als nützlich und wichtig in ihrem Leben akzeptieren, deutlich geringer – und schließlich bleiben nur noch ganz wenige übrig, für die Mathematik auch jenseits der Inhalte von Klasse 10 brauchbar erscheint. Das ist natürlich ein Zerrbild, sagen die Mathematiker, und das völlig zu Recht. Genau so ist es aber, sagen diejenigen, die mit der Mathematik jenseits eines um etwas Bruch- und Prozentrechnen erweiterten Grundschulstoffs abgeschlossen haben – und liegen aus ihrer Sicht ebenfalls gar nicht falsch.

Wer um 1900 ein Auto fahren wollte, musste ein ausgewiesener Techniker sein. „Chauffeure“ hießen die Heizer auf den Lokomotiven, die weitaus mehr tun mussten, als Kohlen zu schaufeln, und auch die Chauffeure der Automobile waren nie ohne Werkzeug und Ölkännchen unterwegs. Heute muss man überhaupt keine Ahnung mehr davon haben, was unter der Motorhaube passiert, und dank moderner Technik in einigen Jahrzehnten vielleicht auch nicht mehr davon, was Vorfahrt oder vorausschauendes Fahren bedeuten. Die Technik selbst wird immer komplizierter, ihre Bedienung immer einfacher (natürlich nur, wenn sie auch so funktioniert, wie sie soll – aber das ist ein eigenes Problem). Kein modernes Auto könnte heute von einer einzigen Person erdacht und gebaut werden; dazu bedarf es einer Vielzahl hoch spezialisierter Experten. Obwohl jeder einzelne dieser Experten in seinem Bereich über unglaublich mehr Wissen verfügt als ein Carl Friedrich Benz im Jahre 1885, fiele es den allermeisten wohl überaus schwer, in Eigenregie ein Auto inklusive aller Komponenten neu zu konstruieren und herzustellen.

Es wimmelt in unserer modernen Welt an Technik und an Experten, dabei sehen die „Benutzeroberflächen“ immer weniger nach Technik aus und gleichzeitig gibt es immer weniger Fachleute, die sich umfassend in einem breiten Gebiet auskennen. Unsere Grundkenntnisse sind gewachsen: wir wissen im Prinzip zum Beispiel, wie ein Verbrennungsmotor funktioniert und auch, dass ein Computer ein superschneller Rechner ist – doch hinter all dem wird immer auch die sokratische Erkenntnis sichtbar: Im Grunde wissen wir am besten, dass wir eigentlich so gut wie nichts wissen.

Für die Mathematik gilt Ähnliches. Es wimmelt in unserem Alltag nur so von Mathematik, doch bleibt sie im Wesentlichen unsichtbar. Wem ist schon bewusst, dass er morgens in einem Bett aufwacht, das mit Hilfe der Mathematik geplant, hergestellt, verpackt, transportiert, kalkuliert und verkauft wurde; von einem Wecker geweckt, der ohne Mathematik nicht nur nie hätte hergestellt werden können, sondern auch völlig sinnlos wäre, da wir ohne Mathematik auch keinerlei Vorstellung von Zeit und Raum hätten? Dass ohne Mathematik kein Licht brennen, kein Lebensmittel hergestellt und kein einziges technisches Gerät funktionieren würde? Wer glaubt, wir würden auch ganz gut ohne Mathematik auskommen, der kann genau so gut glauben, dass wir keine Luft zum Atmen brauchen, weil sie ja sowieso immer da ist. Aber sollten wir deswegen alle Mathematiker werden? Nein – genau so wenig, wie wir alle Mechaniker oder gar Ingenieure werden müssen, nur weil wir Auto fahren. Doch über Grundkenntnisse sollten wir alle trotzdem verfügen – nicht nur, um eins und eins zusammenzählen zu können, sondern auch, um eine Ahnung davon zu haben, was um uns herum vorgeht – genau so, wie wir uns beim Auto fahren wohler fühlen, wenn wir wissen, dass uns keine unheimlichen Mächte bewegen, sondern eine durch Verbrennung freigesetzte und raffiniert umgewandelte Energie.

Wir müssten ja nicht unbedingt wissen, dass unsere Erde keine Scheibe ist, dass aus Raupen Schmetterlinge werden und dass andere Menschen andere Sprachen sprechen; wir könnten überleben, ohne je von Mozart, Picasso oder Schiller gehört zu haben und wohl auch in dem Glauben, dass Blitzschläge Zornesausbrüche überirdischer Wesen sind. Das wollen wir aber nicht, denn wir sind zu Recht stolz darauf, dass wir vieles mit unserem Verstand und unserem Geist fassen können – und dass wir nicht „blöd“ sind, darauf legen wir großen Wert.

Immer, wenn unser Geist ins Spiel kommt, haben wir es aber automatisch auch mit Mathematik zu tun. Das wird allein durch die Übersetzung des Wortes „Mathematik“ deutlich, das etwa so viel bedeutet wie „die Kunst, etwas zu lernen und zu wissen“. Warum aber scheint vielen genau diese Kunst dann so schwer zu fallen? Diese Kunst, die unser Gehirn so gut beherrscht wie nichts anderes? Diese Kunst, ohne die unsere Spezies nicht bis heute überlebt, geschweige denn sich so weit entwickelt hätte?

In Wirklichkeit fällt es den allermeisten von uns überhaupt nicht schwer, etwas zu lernen und auch nicht sehr schwer, etwas zu wissen. Allein die Dinge, die wir in den ersten Lebensmonaten gelernt haben, sind an Komplexität kaum zu übertreffen. Was können wir von Geburt an? Schreien und atmen, saugen und reflexartig greifen – sehr viel mehr ist es nicht. Und was können wir mit einem Jahr? Wären wir nicht in der Lage zu lernen, wir wären kaum überlebensfähig. Aus dem Lernen resultiert auch ein Wissen über das Gelernte; dieses kann sehr bewusst oder auch unbewusst gespeichert sein; Lernen ist dauerhafte Veränderung aufgrund von Erfahrung, Wissen die Summe aller „dauerhaften Veränderungen“.

Krabbeln, laufen, sprechen, selbstständig essen – alles Lernprozesse, die Wissenserwerb beinhalten: Wissen über sich selbst und seinen Körper, Wissen über die Umwelt und andere Menschen, Wissen über Sprache und Grammatik und vieles mehr.

Nicht erst dadurch, dass Sie diesen Text bis hierher lesen konnten, haben Sie also eindrucksvoll bewiesen, dass Sie in der Lage sind, etwas zu lernen und etwas zu wissen – Sie sind in gewissem Sinne „Mathematiker“; unabhängig von Ihren Mathematiknoten oder Ihrer Einstellung zu „der Mathematik“.

Mathematik ist überall, es ist sinnvoll, sich mathematisch zu bilden und jeder Mensch bringt die Voraussetzungen mit, dieses erfolgreich tun zu können – und trotzdem (oder vielleicht auch gerade deswegen?) besitzt Mathematik das Potenzial, unzählige Menschen zu traumatisieren; so sehr, dass sie damit kokettieren, Mathematik „ganz schrecklich“ zu finden – wobei sie nie von sich behaupten würden, es „ganz schrecklich“ zu finden, etwas zu lernen.

In diesem Buch soll der Versuch unternommen werden, diesem Phänomen ein wenig auf den Grund zu gehen. Es ist kein Buch für Leute, die felsenfest davon überzeugt sind, dass Mathematik für ihr Leben bedeutungslos ist. Es ist auch kein Buch für Leute, die sich nicht vorstellen können, dass man mit der Mathematik überhaupt Schwierigkeiten haben kann (so wie der französische Mathematiker Jules Henry Poincaré, von dem der Ausspruch überliefert ist: „Ich verstehe nicht, dass man die Mathematik nicht versteht!“). Es ist ein Buch für alle, die neugierig sind, was das Lernen im Allgemeinen und das Lernen von Mathematik im Besonderen betrifft.

Zur Entlastung der üblichen Verdächtigen

Verdächtiger Nummer 1: Die Schule.

Die Schule ist an allem schuld, und dort in erster Linie die Lehrer?

Natürlich gibt es sehr guten und sehr schlechten Mathematikunterricht – nur „produziert“ der Unterricht nicht zwangsweise sehr gute oder sehr schlechte Mathematikschüler. Manche lernen trotz miserablen Unterrichts sehr viel, manche lernen trotz guten Unterrichts sehr wenig. Das ist ein bisschen so wie mit den Zimmerpflanzen: manche verkümmern trotz intensiver Pflege und manche gedeihen, obwohl man sich kaum um sie bemüht. Auch wenn die Wahrscheinlichkeit, schöne Pflanzen zu erhalten, mit zunehmender Pflege steigt, wird es keine Garantien dafür geben.

Der Mathematikunterricht ist häufig besser als sein Ruf, manchmal wesentlich schlechter, taugt aber kaum als alleinige Erklärung dafür, weshalb sich viele mit der Mathematik so schwer tun.

Um Mathematik zu verstehen, muss man sie nämlich nicht gut „erklärt bekommen“, sondern sie sich selbst erarbeiten und für sich klären. Dazu kann der Unterricht wirksame Hilfestellung geben oder diese versagen – nicht mehr und nicht weniger. Dieses Buch hält einige Hinweise parat, wie solche wirksamen Hilfen aussehen können und wie wirkungslos manche vermeintlichen „Erfolgsrezepte“ sein können, es verspricht aber an keiner Stelle „wenn man es so und so macht, dann funktioniert es!“. Ein guter Mathematiker ist nicht automatisch ein guter Mathematiklehrer (auch wenn die Ausbildung der Gymnasiallehrer in Deutschland von diesem Grundsatz bestimmt zu sein scheint), und ein guter Pädagoge muss über Mathematik Bescheid wissen, um in der Grundschule Mathematik unterrichten zu können (auch wenn in der Ausbildung vieler Grundschullehrer in Deutschland Mathematik kaum eine Rolle spielt). Trotzdem wäre die Schuldzuweisung an die Schule ein echter Kurz-Schluss, der einer so komplexen Problematik in keinerlei Hinsicht gerecht würde.

Verdächtiger Nummer 2: Die eigene Begabung

„Ich kann das einfach nicht!“

„Für Mathe muss man eben besonders begabt sein!“

Für Mathematik muss man nur insofern begabt sein, dass man einen wachen Geist besitzt. Eine Qualle ist wahrscheinlich tatsächlich zu unbegabt, um Mathematik betreiben zu können. Wir Menschen hingegen verfügen über ein so wunderbares Organ wie das Gehirn, das es uns z. B. ermöglicht, in der Kälte der Polarregionen genau so zu überleben wie in der tropischen Hitze, obwohl wir körperlich für ein Leben in der einen Umwelt genau so wenig geeignet sind wie in der anderen. Ein Organ, das uns ermöglicht, unsere eher bescheidenen

Voraussetzungen zur Lautartikulation so differenziert zu nutzen, dass wir damit in einer unglaublichen Komplexität miteinander kommunizieren können. Ein Organ, das Muster und Strukturen wesentlich schneller identifizieren kann, als selbst teuerste Hochleistungsrechner das können. Ein Organ, das sich in stetiger Wechselwirkung mit der Umwelt verändert und ausdifferenziert – und für das die Mathematik eine der leichtesten Übungen darstellt. So fern Sie also über ein Gehirn verfügen, sind Sie ausreichend für die Mathematik begabt.

Dennoch kann ja die erste Aussage durchaus zutreffen: Ich kann das einfach nicht! Wenn ich in Russland geboren worden wäre, hätte ich sicher Russisch gelernt. Doch leider kann ich fast kein einziges russisches Wort. Das liegt nun aber weder daran, dass ich grundsätzlich nicht in der Lage bin, diese Sprache zu erlernen, noch daran, dass Russisch generell nicht zu lernen wäre. Ich kann kein Russisch, weil ich bisher noch keine Anstrengungen unternommen habe, diesen Zustand zu ändern. Natürlich gibt es Menschen, die leichter eine Fremdsprache lernen als andere Menschen, aber so fern keine schweren geistigen oder sonstigen Störungen vorliegen, ist jeder Mensch grundsätzlich in der Lage, eine neue Sprache zu lernen. Und genau so grundsätzlich ist jeder Mensch in der Lage, Mathematik zu lernen. Die Grundvoraussetzungen für beides, das Lernen von Sprache und das Lernen von Mathematik, ist uns allen angeboren. Beides ist die „Software“, die mit unserer „Hardware“ Gehirn standardmäßig „ausgeliefert“ wird.

Verdächtiger Nummer 3: Die Mathematik

Mathematik zu verstehen ist nur wenigen Eingeweihten vorbehalten, denn sie ist wahnsinnig kompliziert und verschachtelt, sagen die einen. Im Gegenteil: Mathematik ist völlig logisch aufgebaut und deswegen so klar und einfach, wie sonst nichts auf der Welt, sagen die anderen. Bereits Kindergartenkinder nutzen ganz selbstverständlich mathematische Konzepte beim Zählen, beim Zeichnen und Basteln, beim Singen und beim Spielen; in gewissem Sinn ist Mathematik wirklich „kinderleicht“. Alles, was mit Mustern zu tun hat, gehört zur Mathematik im engeren Sinne. Mathematik ist die Sprache unseres Gehirns, das die Welt damit entschlüsselt, beschreibt und gestaltet.

Unstrittig ist, dass die Mathematik ein unglaublich vielseitiges und mächtiges Werkzeug ist, und dass die Mathematiker dieses mächtige Werkzeug mit dem denkbar kleinsten technischen Aufwand entwickeln. Dabei erhebt Mathematik gar nicht den Anspruch, etwas über die Wahrheit der Welt zu erfahren, sie funktioniert einfach. Jeder mathematische Beweis gilt immer nur unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen, die man für ihn zu Grunde gelegt hat, stimmen. Letztlich sind das aber Bedingungen, die sich selbst nicht beweisen lassen, sondern von denen wir alle ganz selbstverständlich annehmen, dass sie gegeben sind. (Das gilt zumindest für den Bereich der Mathematik, der in der Schule behandelt wird und auf den sich die Inhalte dieses Buches beschränken).

Niemand kann einfach beweisen, dass 1 und 1 zusammen 2 ergeben, aber niemand wird dieses ernsthaft anzweifeln. So lange die Mathematik auf solchen Selbstverständlichkeiten beruht, steht sie mit keiner unserer alltäglichen Beobachtungen im Widerspruch.

Der deutsche Philosoph Arthur Schopenhauer, seines Zeichens kein Mathematiker, unterschied folgerichtig zwischen der Wahrheit als solcher und den „mathematischen Wahrheiten“. Zu letzteren äußerte er sich wie folgt:

„Selbst Wahnsinnige, wenn sie überhaupt noch verstehen, wovon die Rede ist, sehen die mathematischen Wahrheiten ein!“

Die drei Hauptverdächtigen wurden also in soweit entlastet, dass keinem von ihnen die Alleinschuld an dem teilweise traurigen Zustand des mathematischen Verständnisses gegeben werden kann. Dennoch können sie aber nicht völlig von dem Vorwurf freigesprochen werden, ihren Teil zu der mitunter unglücklichen Situation beizutragen.

Mathematikunterricht vermittelt mitunter das falsche Bild von einer Mathematik, in der immer alles eine berechenbare, eindeutige Lösung besitzt. Eine Frage wie „wie viel Euro kostet ein Dollar?“ wird im Mathematikunterricht nicht gestellt, ohne dass eine Tabelle mit dem Wechselkurs zur Verfügung gestellt wird. Dabei ist das eine komplexe Frage, die ganze Heerscharen von Wirtschaftswissenschaftlern beschäftigen kann. Im Mathematikunterricht wird daraus eine simple Zweisatzaufgabe.

Sich selbst als „mathematisch unbegabt“ zu bezeichnen, ist nicht nur nach wie vor gesellschaftlich akzeptiert (wohingegen kaum jemand öffentlich zugeben würde, nicht richtig lesen zu können), sondern gilt mitunter sogar als schick, verbindet man doch mit mathematisch begabten Menschen eher das Bild von blassen, kurzsichtigen und wenig lebensfrohen Gestalten – was genau so zutreffend ist wie die Klischees von den geizigen Schotten, blonden Schweden und lederbehosten, Bier trinkenden Bayern.

Doch was man sich lange genug selbst einredet, gewinnt seine eigene Wahrheit: Stellen Sie ein Tablett voll mit gefüllten Wassergläsern und tragen Sie dieses mit dem ständig sich wiederholenden Kommentar: „Oh Gott, das kipp’ ich gleich um!“ durch die Gegend, und es ist klar, was passieren wird. Positives Denken kann helfen, negatives Denken schadet bestimmt.

Die Mathematik schließlich – oder, besser gesagt, ihre Verbindung zur real empfundenen Welt – ist nicht annähernd so stimmig, logisch, klar und eindeutig, wie wir im allgemeinen denken, dass sie dieses sei. Besonders deutlich wird das gerade bei den grundlegenden, scheinbar so „einfachen“ und „klaren“ Begriffen. Bevor hierzu etliche Beispiele genannt werden, soll in den nächsten beiden Kapiteln geklärt werden, warum dies der Fall ist. Das hat einiges damit zu tun, wie wir denken und damit, wie wir versuchen, dieses Denken in kommunizierbare Formen zu bringen.

Begriffe sind nicht leicht zu greifen

Der Patient kommt aufgebracht zum Arzt. „Das Medikament, das Sie meiner Frau verschrieben haben, hat ihren Zustand nur noch verschlimmert!“ „Haben Sie es Ihr denn genau nach Anweisung gegeben?“, will der Arzt wissen. „Natürlich! Ich habe meine Frau vorher sogar ganz gründlich durchgeschüttelt, so wie es auf der Flasche stand, aber danach ging es ihr gar nicht gut!“.

Was empfinden wir an diesem Kalauer amüsant? Dass jemand den Hinweis „vor Gebrauch schütteln“ falsch versteht und auf das falsche „Objekt“ bezieht? Liegt der Fehler dann nicht an der ungenauen Anweisung, bei der es heißen müsste „das Medikament schütteln?“. In Wirklichkeit käme uns eine solche Formulierung reichlich seltsam vor. Wir reagieren auf zu ausführliche Erläuterungen empfindlich, wenn sie bei uns den Eindruck erwecken, dass uns der oder die Erklärende als geistig minderbemittelt einstufen. Wer je stundenlang versucht hat, ein Computerproblem zu lösen und dann einen Experten befragt hat, um zunächst die Frage zu hören „ist denn der Stecker in der Steckdose eingesteckt?“, weiß, wie sehr wir neunmalkluges Gehabe hassen. Dass umgekehrt bei entsprechenden Computerhotlines Geschichten von Kunden kursieren, deren Problem tatsächlich durch Einstecken des Netzsteckers gelöst werden konnte, zeigt, dass wir auch übermäßige Begriffsstutzigkeit in keiner Weise schätzen.

Dabei ist ein „Begriff“ etwas äußerst komplexes und wesentlich schwieriger zu definieren, als man auf den ersten Blick glauben möchte.

Wir alle können uns unter dem Begriff „Haus“ etwas vorstellen. Aber diese Vorstellungen können sich erheblich unterscheiden. Dabei geht es nicht nur um Größe und Aussehen (von der Hütte zum Wolkenkratzer), sondern auch um die weitere Bedeutung (als Gebäude, als Zuhause, als Behausung im weitesten Sinn, als verbindender Rahmen, als Bezeichnung einer Institution, als konkreter Ort u. a.). Die Bedeutung erschließt sich dabei stets aus dem Zusammenhang:

Das Haus neben der Bäckerei; nach Hause kommen; das Haus der Schnecke; das gemeinsame Haus der Kirche; in unserem Hause; er ist im Haus (und nicht im Garten); sie hat Haus und Hof verspielt; die Spielfiguren stehen sicher im „Haus“; heute ist volles Haus; das „Haus“ der Vierecke (damit meint man in der Mathematik die systematische Zusammenstellung aller möglicher Viereckstypen); auch in zusammengesetzten Wörtern bedeutet das Wort unterschiedliches: Hausarrest, Hausverbot, Hausfrau, Haustür, Hausboot, Haustier, Hausierer, und so weiter.

Eine solche Betrachtung lässt sich zu nahezu jedem Begriff anstellen. Wir assoziieren viele mögliche Bilder und Zusammenhänge, und derjenige Kontext, in dem der Begriff gebraucht wird, stößt auf entsprechendes inneres Echo. Unsere Begriffe sind nicht durch das Auswendiglernen von Definitionen in uns entstanden, sondern durch vielfältige Erfahrungen, Handlungen, Erlebnisse, Versuche und Irrtümer – also durch ein echtes und nachhaltiges Lernen. Dazu haben wir auch die jeweilige Umgebung mitgelernt, innerhalb derer uns der Begriff begegnet ist. Wenn wir nun diesen Begriff verwenden, schwingen diese Nebenbedingungen immer im Hintergrund mit.

Ein Begriff wird durch vielfältige Verknüpfungen für unser Gehirn auch leichter nutzbar: um aktiviert zu werden, muss der Begriff an mehreren „Stationen“ verfügbar sein. Unser Gehirn arbeitet nicht linear wie etwa eine Stromleitung, sondern vernetzt. Erst wenn mehrere „Schalter betätigt“ werden, kann mit der entsprechenden Information weitergearbeitet werden. Dabei ist es eben nicht immer der gleiche „Schalter“, sondern viele ähnliche, die wiederum die Vielfalt eines Begriffes nutzen.

Ganz hilfreich ist in diesem Zusammenhang der Begriff der „Redundanz“. Redundanz ist eine Größe, die die Ähnlichkeit von Informationen beschreibt. Je größer der Neuigkeitsgehalt einer weiteren Information ist, desto weniger redundant ist diese.

Beispiel:

Die Information „Paris ist die Hauptstadt von Frankreich“ dürfte für Sie vollständig redundant sein; die Information „Banjul ist die Hauptstadt von Gambia“ eher nicht. Allerdings ist nun auch die Information „Die Stadt Banjul liegt in Afrika“ redundant – aber nur, falls Ihnen klar war, dass Gambia ein afrikanisches Land ist…

Und an was denken Sie, wenn Sie den Begriff Afrika lesen? Obwohl Sie wahrscheinlich noch nie in Gambia waren, entsteht allein durch das Lesen dieser Zeilen so etwas wie ein Bild von Gambia vor Ihrem „inneren Auge“.

Möglicherweise ist dieses Bild völlig falsch, aber es ist immerhin ziemlich sicher, dass zu diesem Bild keine Eisbären, keine Fachwerkhäuser und keine Hochgeschwindigkeitszüge gehören.

Zum Aufbau von Verknüpfungen und Assoziationen in unserem Gehirn ist Redundanz nicht nur hilfreich, sondern geradezu notwendig. Wären wir nicht in der Lage, Ähnlichkeiten zu erkennen und zu nutzen, müssten wir buchstäblich bei allem, was wir tun, ganz „von vorn“ anfangen.

Wer Auto fahren kann, ist normalerweise in der Lage, sofort mit einem beliebigen serienmäßigen Auto loszufahren, selbst wenn er genau diesen Typ noch niemals vorher gesehen hat. Dass bei der Übertragung von Erfahrungen auf ähnliche Situationen dabei sogar mehr Nebenbedingungen mit übertragen werden, als eigentlich notwendig wären, kann man beim Autofahren gut sehen, wenn man von einem Fahrzeug mit Gangschaltung zu einem Auto mit Automatikgetriebe wechselt: fast zwangsläufig beginnt bei bestimmten Geschwindigkeiten der linke Fuß zu zucken.

Gehören Sie auch zu den Unbelehrbaren, die die Feststellbremse partout als Handbremse bezeichnen und bei denen ein skeptisches Unwohlsein beim Parken am Hang bleibt, sofern man an keinem Hebel zerren kann, mit dem das Auto vermeintlich gesichert wird?

Begriffe sind zwar nicht eindeutig, wecken aber trotzdem bestimmte „Erwartungshaltungen" in uns.

Denken Sie jetzt bitte einmal kurz an „Fingernägel".

Und nun nennen Sie bitte eine Farbe und ein Werkzeug.

Grün – Säge? Das wäre Ihnen vielleicht eingefallen, wenn Sie vorher kurz an Weihnachten gedacht hätten. Jetzt kam Ihnen vermutlich eher rot – Hammer oder rot – Feile in den Sinn.

Sie wissen, dass aus Wein destillierter Alkohol farblos ist und die Braunfärbung mancher Spirituosen auf Farbstoffen beruht (die auf natürliche Weise aus Holzfässern ausgelöst oder in Form von Karamell zugesetzt wurden). Weshalb wundern Sie sich aber nicht besonders, wenn Ihnen in der Werbung Weinbrand aus Rotwein präsentiert wird, der eine rote Farbe hat? (Die hat er natürlich nur, weil er künstlich gefärbt wurde).

In Experimenten wurde nachgewiesen, dass wir den Geschmack einer Limonade auch nach ihrer Farbe beurteilen. Eine grünlich gefärbte Limonade empfinden wir im direkten Vergleich als erfrischender, eine orange gefärbte Limonade als fruchtiger – selbst dann, wenn beide völlig identisch schmecken.

Eine solche Denkweise ist keineswegs ein Zeichen unserer „Dummheit", sondern unserer Fähigkeit, anhand weniger Informationen eine komplexe Situation rasch so zu erfassen, dass wir zumindest grob schnell angemessen entscheiden können. In der Natur sind grüne Früchte meistens sauer und orange Früchte fruchtig! Wir sammeln also keineswegs nur „objektive" Daten, sondern konstruieren uns aus ähnlichen Informationen ähnliche Bilder.

Was dabei „ähnliche" Informationen sind, wird auch subjektiv bestimmt. Genau so, wie jeder in einer Familie andere Ähnlichkeiten eines Babys zu bestimmten Familienangehörigen entdeckt, findet jeder unter Umständen andere „Ähnlichkeiten" zwischen eigenen Erfahrungen und neuen Informationen.

Wie bestimmen ein Physiker, ein Ingenieur und ein Betriebswirt die Höhe eines Kirchturms?

Der Physiker steigt mit Ball und Stoppuhr nach oben, lässt den Ball herunterfallen, misst die Zeit bis zum Aufschlag und bestimmt aus diesen Daten die Turmhöhe.

Der Ingenieur sucht im Stadtarchiv nach Plänen oder Tabellen, aus denen er die Höhe ablesen kann.

Der Betriebswirt gibt dem Pfarrer 10 Euro, damit ihm dieser die Höhe des Turmes sagt.

Aber was macht der Mathematiker? Errechnet er die Höhe möglicherweise aus der Länge des Schattens? Muss man in Mathematik immer etwas „rechnen"? Die klügste Herangehensweise, durchaus eine mathematische, ist diejenige, als erstes die Frage zu stellen: Zu welchem Zweck muss man die Höhe des Turmes wissen? – um dann aus mehreren möglichen Verfahren ein angemessenes auszuwählen.

Innerhalb einzelner Verfahren kann die Mathematik – und das ist eine ihrer großen Stärken – durchaus objektiv sein und zwischen „passenden“ und „unpassenden“ Ähnlichkeiten unterscheiden. So sind die Aussagen „Der Turm ist 145 Meter hoch“ und „Der Turm ist 0,145 Kilometer hoch“ völlig redundant, die Aussagen „Der Turm ist 145 Meter hoch“ und „Der Turm ist knapp 150 Meter hoch“ ähnlich, aber nicht gleichwertig und die Aussagen „Der Turm ist 145 Meter hoch“ und „Der Turm ist 142 Meter hoch“ widersprechen sich, sind also (gleichzeitig gemacht) mathematisch „unpassend“.

Will ich die Höhe dagegen nur wissen, um eine grobe Vorstellung davon zu bekommen, muss es mich nicht näher interessieren, ob es denn nun in Wirklichkeit 142 Meter oder 145 Meter sind. Auch mit unscharfen Angaben kann ich mir also einen „Begriff“ von etwas machen.

Aber wie sieht das mit den mathematischen Begriffen aus? Mathematik ist doch, bitte schön, immer logisch und klar.

Die Antwort darauf kann etwas verstörend wirken: Je „komplizierter“ Mathematik wird, desto klarer und logischer ist sie; bei den ganz grundlegenden Vorstellungen und Begriffen haben wir es aber sehr oft mit Unstimmigkeiten, Unschärfen und recht willkürlichen Festlegungen zu tun, die unserem „gesunden Menschenverstand“ durchaus widersprechen können. Wenn manche von uns nie darüber stolpern, kann es auch einfach daran liegen, dass sie zu wenig darüber nachgedacht haben und vieles unreflektiert übernommen haben. Umgekehrt gilt aber auch, dass manche, die daran hängen geblieben und immer nur den Hinweis „aber das ist doch ganz einfach!“ gehört haben, deswegen möglicherweise für sich beschlossen haben „Mathe ist mir zu hoch“ – obwohl das „Hängenbleiben“ durchaus auch gerade ein Hinweis auf kluge, kritische – also im besten Sinne mathematische – Denkweise sein kann!

2 + 2 ist 4, aber – so der Naturwissenschaftler und Schriftsteller Erwin Chargaff – 2 + 2 sind für zwei verschiedene Menschen nicht die gleiche 4!

Bevor einige der erwähnten Klippen mathematischer Grundbegriffe vorgestellt werden, folgt noch ein kleiner Ausflug in den „Mechanismus“ unseres Denkens.

Falsch verbunden: Hinderliche Hilfen

Stellen Sie sich bitte eine schöne Winterlandschaft vor. So mit richtig viel Schnee und strahlendem Sonnenschein. Ja? Haben Sie das Bild vor sich? Schnee, Schnee, Schnee?

Dann beantworten Sie bitte gleich die folgende Frage:

Was trinkt die Kuh?

Sie haben die Antwort „Milch“ gegeben, stimmt’s?

Die Kuh wäre als Nutztier sicher nicht so begehrt, wenn sie die Milch trinken würde statt sie zu „produzieren“. Sie begnügt sich glücklicherweise mit Wasser (es hilft auch nicht, dass sie als junges Tier ja doch Milch trinkt. Eine Kuh ist ein weibliches Rind, das bereits gekalbt hat). Wie kommt die Antwort „Milch“ also zu Stande? Die Antwort ist ziemlich einfach. Der Gedanke an die Winterlandschaft mit Schnee aktiviert unter anderem auch ein Bild von „weiß“. Weiß – Kuh – Getränk? Was sollte das denn sonst sein als Milch?

Ein weiteres schönes Beispiel steht in dem wunderbaren Buch „Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können“ von Stanislas Dehaene:

Nennen Sie eine Zahl zwischen 5 und 12!

Sehr viele Menschen wählen bei dieser Aufgabe die Zahl sieben. Weshalb? Sie ist nicht die „Mitte“ zwischen beiden Zahlen. Aber 12 – 5 = 7 und 5 + 2 = 7; wir können gar nicht anders, als dieses, wenn wir das verinnerlicht haben, gewissermaßen „mitzudenken“.

So hilfreich das einerseits ist, so hinderlich kann es sein, wenn völlig unpassende Assoziationen geweckt werden oder wenn Informationen durch eine Vielzahl ähnlicher Informationen unkoordiniert überlagert (und nicht verständnisvoll verknüpft) werden. In diesem Fall spricht man von „Interferenz“. Ausführlich erläutert ist das beispielsweise in dem Klassiker „Denken-Lernen-Vergessen“ von Frederic Vester.

Hieraus stammt auch die Idee für folgendes Beispiel:

Lassen Sie sich von einer zweiten Person die nachfolgende Zeile langsam und deutlich vorlesen. Versuchen Sie danach, die ersten fünf Zahlen aus dem Gedächtnis aufzusagen.

7 – 4 – 3 – 7 – 2 – rot – gelb – blau – rot – grün – gelb – rot.

Das war eine sehr leichte Übung, oder? Jetzt wiederholen Sie die gleiche Aufgabe mit dieser Zeile:

3 – 5 – 2 – 6 – 5 – 4 – 2 – 5 – 3 – 6 – 2 – 3.

Jetzt war es wesentlich schwerer: Erstens „schwirrte“ Ihnen noch die erste Aufgabe im Kopf herum und zweitens störten die den „wichtigen“ Zahlwörtern sehr ähnlichen „Füllwörter“ das Behalten zusätzlich.

Gemäß diesem Prinzip können auch manche gut gemeinte Hilfen echte Hindernisse sein. Wenn man als EDV-Dozent an der Volkshochschule wirksam verhindern will, dass die Teilnehmer lernen, wie man Daten sichert, dann erklärt man das am besten so:

„Um eine Datei zu sichern, muss man diese speichern, und zwar auf Festplatte oder einem anderen Speichermedium. Klicken Sie dazu mit der Maus auf das Diskettensymbol in der Symbolleiste oder auf Datei… speichern beziehungsweise Datei… speichern unter in der Menüleiste oder benutzen Sie die Tastatur, dann entweder die Kombination „Alt“ und „D“; „Alt“ gedrückt halten und dann von „D“ auf „S“ beziehungsweise „U“ wechseln oder gleich „Strg“ und „S“. Anschließend wählen Sie in dem dann erscheinenden Menü zuerst das Medium aus und geben dann den gewünschten Dateinamen sowie eventuell ein anderes Dateiformat als das voreingestellte an.“

Eine solche Verschachtelung von „unds“ und „oders“ bringt die Regelkreise unseres Gehirns schier zur Verzweiflung.

Für einen Computer oder für eine mathematische Beschreibung ist das hingegen kein Problem. Umgekehrt erkennt unser Gehirn dafür ganz ohne Schwierigkeit in dem gezeichneten „Punkt, Punkt, Komma, Strich“ ein Gesicht, während man das einem Computer nur sehr schwer (weil mathematisch nur sehr schwer zu beschreiben) „beibringen“ kann. Am erfolgversprechendsten ist in diesem Zusammenhang die Simulation der vernetzten Nervenzellen unseres Gehirns, man spricht dabei von „Neuronalen Netzen“.

Die gegenseitige Störung ähnlicher, aber nicht wirklich sinnvoll sich ergänzender und redundanter Informationen ist auch unter dem Phänomen der „Ähnlichkeitshemmung“ bekannt.

Vermutlich würden wir nicht sonderlich stutzig, wenn uns in einem englischen Supermarkt die Bedienung fragen würde „And what do you become?“ („Oh, you come also out Germany?“ wäre vielleicht eine angemessene Antwort). Schöne nach ähnlichem Muster entstandene Übersetzungsfehler hat Bastian Sick in seinem Buch „Der Dativ ist dem Genitiv sein Tod“ aufgelistet. Da wird dann schon mal aus einem Sattelzug (= tractor trailer) ein Traktor, einem Funkgerät (= mobile radio) ein Radio und aus einer hochwichtigen (= vital) Rolle eine vitale (oder fidele?) Rolle. Ein Freund von mir hielt die Bemerkung einer Holländerin zu seinem zusammengeschnürten Schlafsack „that’s handy!“ („das ist ja praktisch!“) für den Versuch, die Ähnlichkeit dieses Pakets mit einem Mobiltelefon zu beschreiben und erntete verstörte Blicke, als er daraufhin so tat, als versuche er mit seinem Schlafsack zu telefonieren…

In der Badischen Zeitung war vor einiger Zeit ein Leserbrief abgedruckt, in dem der Schreiber zu Recht darauf hinwies, dass die als Schlussverkaufswerbung gedachte Plakatierung von „Sale! Sale! Sale!“ bei den vielen französischsprachigen Kunden im Grenzgebiet seltsame Assoziationen wecken könnte (im Französischen bedeutet „sale“ so viel wie „schmutzig“!).

Tatsächlich hat sich umgekehrt auch schon so mancher deutsche Autofahrer auf französischen Autobahnen gefragt, warum es dort so oft „rappelt“ („Rappel“, mit Betonung auf der letzten Silbe, bedeutet nichts anderes als „Wiederholter Aufruf“ und erinnert als Zusatzschild meist unter Geschwindigkeitsbeschränkungs-Schildern auf eben diese, schon vorher angezeigte, Beschränkung).

Ein mathematisches Beispiel:

Was, bitte, bedeutet der Ausdruck „4 : ½“ ?

Eine häufige Antwort lautet in etwa so: „Also, wir haben vier Bonbons und verteilen die an… zwei Kinder… nein, an halbe Kinder… und dann bekommt jedes… also…“

Nun, abgesehen davon, dass das Halbieren von Kindern nicht nur aus didaktischen Gründen abzulehnen ist – dieses „Verteilen“ klappt nur, wenn der Divisor eine Zahl wie 1, 2, 3 usw. ist.

Also packt man vielleicht die Regel aus, die da lautet „durch Brüche wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert“. Aber 4 ist ja gar kein Bruch und zwei Eintel hört sich auch irgendwie seltsam an. Die 4 wird dann auch zu vier Einteil und vier Eintel mal zwei Eintel sind acht Eintel und das… Wie, Sie kommen jetzt nicht mehr mit? Aha, mathematisch völlig unbegabt?! Von wegen!

Lesen Sie die Aufgabe 4 : ½ doch mal so: Aus 4 Pfannkuchen werden halbe Pfannkuchen gemacht. Wie viele halbe Pfannkuchen kann man so erhalten? Eine leichte Aufgabe!

Die Division kann außer einem Verteilen auch ein „in Portionen aufteilen“ bedeuten:

6 : 3 = 2 kann heißen „6 Bonbons werden an 3 Kinder verteilt; jedes erhält 2 Bonbons“ aber eben auch „6 Bonbons werden in Dreierportionen aufgeteilt; man erhält 2 solche Portionen“. Machen Sie zu beiden Vorstellungen eine kleine Skizze, und Sie erkennen sofort den Unterschied (oder schauen Sie kurz auf Seite 52 nach).

Situationen zur „Erklärung“ müssen nicht nur „ähnlich“ sein, sie müssen auch „passen“. „Passen“ sie nicht, sind sie nicht nur nicht hilfreich, sondern unter Umständen richtig hinderlich.

Gut, falls man Ihnen die Division 4 : ½ in der Schule nur als sinnlose Aufgabe gestellt hat, würde das unseren Verdächtigen Nummer Eins (Schule) wieder belasten. Sollten Sie darüber hinaus partout nicht in der Lage sein, sich vorzustellen, dass man aus 4 ganzen Portionen genau 8 halbe Portionen erhält, belastet das den Verdächtigen Nummer Zwei (Sie selbst). Die nächsten Kapitel sehen auf den ersten Blick so aus, als würden sie den Verdächtigen Nummer Drei (Mathematik) in Verlegenheit bringen. Doch ist sich diese ihrer Schwächen durchaus bewusst und unternimmt beträchtliche Anstrengungen, jene zu beheben – nur sind die Ergebnisse dieser Anstrengungen nicht unbedingt immer für den Alltag hilfreich.

Sie sollen daher hier nicht näher ausgebreitet werden. Mit jeder dafür notwendigen Formel würde die Zahl der weiterlesenden Personen rapide sinken, wenn man einem weit verbreiteten Vorurteil Glauben schenken darf.

Zu erwähnen, dass es diese gibt, gebietet jedoch die Redlichkeit, denn sonst könnte der falsche Eindruck entstehen, unsere Mathematik wäre letztlich auf Sand gebaut. Das stimmt so natürlich nicht, und jeder Mathematiker fühlte sich und seine Wissenschaft aus gutem Grund fälschlicherweise diskreditiert.

Aber es ist wirklich so, dass gerade die vermeintlich einfachen und grundlegenden Begriffe der Mathematik durch kurze Definitionen eben nicht völlig „in den Griff“ zu bekommen sind.

Klarheit, Einfachheit und Logik: Die große Stärke der Mathematik – und manchmal ihre Schwäche, wenn das Logische nicht einfach ist oder umgekehrt.

Am Anfang war die Zahl

Leopold Kronecker, einem deutscher Mathematiker, der sich im 19. Jahrhundert mit der logischen Grundlegung der Mathematik beschäftigte und in diesem Zusammenhang auch mit der Frage, wie denn die einfachsten „Bausteine“ der Mathematik, die Zahlen 1, 2, 3 und so weiter zu begründen seien, wird der Ausspruch zugeschrieben: „Gott schuf die natürlichen Zahlen, alles andere ist Menschenwerk.“

Der Ausdruck „natürliche Zahlen“ unterstellt die Existenz „unnatürlicher“ Zahlen. In Wirklichkeit sind alle Zahlen Konstruktionen des menschlichen Geistes. „Positive ganze Zahlen“ meint das Gleiche, aber die Frage, welche Zahlen das genau sind, ist schon nicht mehr eindeutig zu beantworten. Zahlen kommt von Zählen, und wenn man bei „Eins“ schon mit dem Zählen aufhört, hat man ja noch gar nicht wirklich gezählt. Und folgerichtig hielten die Griechen die Eins gar nicht für eine „Zahl“, sondern nur für die Bezeichnung der „Einheit“. Heute sind wir uns darüber einig, dass die Eins eine natürliche Zahl ist.

Doch es gibt noch einen weiteren Problemfall: die Null. In der Familie der Zahlen ist die Null ein relativ junges Mitglied. „Erfunden“ wurde die Null auch gar nicht als Zahl, sondern als Ziffer. Welcher Unterschied zwischen Zahl und Ziffer besteht wird später erläutert. Sie kennen die Römischen Zahlen? Ist Ihnen schon aufgefallen, dass es dort kein Symbol für die „Null“ gibt? Bis ins Mittelalter (so lange waren bei uns römische Zahlzeichen verbreitet) nicht im Gebrauch, hat die Null heute sogar den Zutritt zur exklusiven Gesellschaft der Natürlichen Zahlen geschafft. Noch vor wenigen Jahren unterschied man die Menge der Natürlichen Zahlen (Symbol $\mathbb{N}$), ohne die Null, und die Menge $\mathbb{N}_0$, zu der die Null dazugehörte. Heute ist $\mathbb{N}$ das Symbol für die Menge der Natürlichen Zahlen (einschließlich Null), und wenn die Null doch einmal ausgeladen wird, trägt die Menge das Symbol $\mathbb{N}^+$. Die Menge $\mathbb{N}^+$ hat also weniger Elemente als die Menge $\mathbb{N}$. Wäre es nicht einleuchtender, dass etwas mit einem zusätzlichen „+“ irgendwie größer ist? Und ob die Null dazugehört, wenn von $\mathbb{N}$ die Rede ist, hängt (kann das überhaupt sein?) vom Datum ab:

So kann die Aussage „die Division durch alle Zahlen aus $\mathbb{N}$ ist definiert“ 1960 richtig und 2000 falsch sein, obwohl eine Division durch Null weder definiert war noch ist.

Ähnlich missverständlich wie der Begriff „Natürliche Zahlen“ sind sämtliche weiteren Bezeichnungen für andere Zahlenbereiche:

Ganze Zahlen (die Zahlen …,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…; Symbol $\mathbb{Z}$): Synonyme zu „ganz“ sind „unbeschädigt“ und „vollständig“. Die Zahl 1,5 ist keine „ganze Zahl“, aber deswegen doch weder „beschädigt“ noch „unvollständig“!

Rationale Zahlen (alle Zahlen, die als Bruch mit ganzen Zahlen geschrieben werden können; Symbol $\mathbb{Q}$):

“Rational“ heißt so viel wie „vernünftig“. Demnach wäre eine so wichtige Zahl wie die Kreiszahl π „unvernünftig“. Wahrhaft keine vernünftige Bezeichnung.

Reelle Zahlen (alle Zahlen, die als endliche oder unendliche Kommazahlen beschrieben werden können; Symbol $\mathbb{R}$):

Reell heißt vertrauenswürdig oder wirlich vorhanden. Warum sollte man ausgerechnet auch jenen Zahlen vertrauen, die unvollständig und unvernünftig sind? Und „wirklich vorhanden“ sind Zahlen ohnehin nur in unseren Köpfen.

Außerdem gibt es noch „komplexe Zahlen“, aber wir wollen ja keine Komplexe bekommen, denn komplex ist kompliziert und undurchsichtig – und auf den ersten Blick kann das auf diese Zahlen durchaus zutreffen.

Immerhin sind die so „komplexen“ Zahlen aber äußerst hilfreich und auch gar nicht so schwer zu „handhaben“. Sie bestehen aus zwei Teilen, einem „reellen“ und einem „imaginären“. Auch das ist eine widersprüchliche Bezeichnung, denn „imaginär“ – „erdacht“ – sind letztlich alle Zahlen.

Auch die Art und Weise, in der Zahlen aufgeschrieben werden, ist erdacht, und das sogar ziemlich raffiniert. So raffiniert, dass ihre Entwicklung viele Jahrhunderte in Anspruch genommen hat. Um große Anzahlen zu erfassen, werden sie gedanklich in Zehnerportionen gebündelt. Entstehen dabei mehr als neun solcher Bündel, werden diese wiederum zu noch größeren Einheiten zusammengefasst. In unserem System heißen die so entstehenden Bündel Zehner, Hunderter, Tausender usw. und sind uns sehr vertraut. Um eine Zahl aufzuschreiben, verwendet man Ziffern, wobei jede Ziffer die Zahl der einzelnen „Bündel“ angibt. Die Zahl sechsunddreißig besteht dann aus der Ziffer 3 (drei Zehnerbündel) und der Ziffer 6 (sechs „ungebündelte“ Einer). Damit man nicht immer die Bezeichnung der Bündel „mitschleppen“ muss, nutzt man die geniale Idee des „Stellenwertes“: ganz rechts stehen immer die „Einer“, links daneben die „Zehner“, direkt links davor die Hunderter“ und so weiter. So lässt sich eindeutig zwischen 36 und 63 unterscheiden.

Was aber, wenn man zum Beispiel nur Zehnerbündel, aber keine übrigen Einer mehr hat, wie zum Beispiel bei der Zahl vierzig? Klar ist, dass man die Ziffer 4 benutzt, um die 4 Zehner zu bezeichnen. Schreibe ich aber einfach nur „4“, so würde ich das Ganze als „4 Einer“ lesen.

Es bleiben zur Lösung des Problems drei prinzipielle Möglichkeiten:

1. Ich vertraue darauf, dass ich mir die Bedeutung aus dem Zusammenhang erschließen kann (worin unser Gehirn ja meisterhaft ist). Wenn ich mein Alter mit „4 Jahre“ angebe, wird man schon erkennen, dass die 4 weder „4 Einer“ noch „4 Hunderter“ bedeutet. Die Babylonier haben sich in ihrer Zahldarstellung jahrhundertelang tatsächlich so beholfen und haben es (nicht nur, aber auch) in der Mathematik zu beachtlichen Leistungen gebracht!

2. Ich schleppe doch wieder die Bezeichnungen mit; schreibe also „4 Zehner“. Ein System, das die Chinesen ebenfalls über Jahrhunderte durchaus erfolgreich praktizierten.
3. Ich benutze einen „Platzhalter“ für „leere“ Stellen, um damit meine Ziffer an die „richtige“ Position zu bekommen. Die Funktion dieses Platzhalters zu übernehmen war die entscheidende Aufgabe der Ziffer „0“. So lässt sich die Zahl vierzig als 40 schreiben, was so viel bedeutet wie „4 Zehnerbündel und keine ungebündelten Einer“.

So weit, so gut – allein unsere Zahlwörter ordnen sich dieser Logik so gar nicht unter. In einigen asiatischen Sprachen liegt die Sache wesentlich einfacher. Eine Zahl wie 98765 wird dort – wörtlich übersetzt – „Neun-Zehntausender Acht-Tausender Sieben-Hunderter Sechs-Zehner Fünf“ genannt.

Sie denken, das sei kompliziert?

Dann betrachten Sie einmal unsere Bezeichnung genauer:

Acht und Neunzig Tausend Sieben Hundert Fünf und Sechzig. Als „Additionskette“ erscheint bei der asiatischen Sprechweise 90000 + 8000 + 700 + 60 + 5, bei der Deutschen 8000 + 90000 + 700 + 5 + 60, wobei ich zu der 8 die Tausender noch hinzudenken muss, da sie gar nicht erwähnt werden.

DAS ist kompliziert.

Dieses unangenehme Verdrehen der Stellenwerte nennt man „Inversion“, und das bedeutet nichts Gutes. Schließlich sind Inversions (=Umkehr-) Wetterlagen für den Wintersmog in Großstädten verantwortlich, und die Zahleninversion hat durchaus das Potenzial, für Gedankensmog zu sorgen.

Fälschlicherweise könnte ich unser Zahlwort nämlich auch als 8 + 90 + 1000 + 7 + 100 + 5 + 60 interpretieren. So etwas tun wir nicht?

Durchaus!

Die „Agenda zwanzigzehn“, das Jahr „Siebzehnneunundachtzig“ oder die Telefonnummer „Sechs-dreiundzwanzig-fünfundfünfzig“ – wir spielen oft mit Ziffern bei der Benennung von Zahlen, auch dort, wo es verfälschend wirken kann.

Stellen Sie sich folgende Zahlen vor: dreihundertneunzig, zweihundertneunzig, einhundertneunzig, nullhundertneunzig. 390, 290, 190, 090? Nullhundertneunzig? Das ist doch eher 0190. Also dreihundertneunzig = 3190. Oder 30090? Oder vielleicht doch eher 310090???

Wenn wir unsere Phantasie nur etwas spielen lassen, finden wir außer der „richtigen“ Schreibweise für „Fünfundsechzigtausendvierhundertdreizehn“, 65 413, auch folgende einigermaßen logische Kombinationen (sprechen Sie bei den folgenden Beispielen jeweils das Zahlwort aus, dann erkennen Sie die „Bauweise“):

65 1000 400 3 10	65 1000 400 13
65 1000 403 10	65 1000 413
65 1000 4 100 3 10	65 1000 4 100 13
65 1000 4 103 10	65 1000 4 113
65000 400 3 10	65000 403 10
65000 400 13	65000 4 113

65000 413	65400 13
65400 3 10	65403 10
65004 113	65004 103 10
65004 100 13	65004 100 3 10

und darunter noch nicht eine einzige Ziffernfolge, die mit „5“ beginnt, so wie es das Wort nahe legt; also etwa 5 60000 400 13!

Auch umgekehrt lässt sich eine Ziffernfolge mehrfach „lesen“ und kann dadurch jeden so effektiv verwirren, dass man wirklich keine Chance mehr hat, zu erkennen, was denn eigentlich gemeint ist.

Sind Sie bereit? Dann betrachten Sie die harmlose Ziffernfolge 4856.

Viertausendachthundertsechsundfünfig. Gut.

Achtundvierzigsechsundfünfzig. Auch noch gut.

Vierachtfünfsechs. Immer noch.

Vierfünfundachtzigsechs. Hmmm…

Vierachthundertsechsundfünfzig.

Vierhundertfünfundachtzigsechs.

Achtundvierzigfünfsechs.

Vierachtsechsundfünfzig.

Und je mehr Stellen, desto schlimmer kann es kommen.

Wie schön wäre da Viertausend-achthundert-fünfzehn-sechs, wäre nicht das Wort „fünfzehn“ so hartnäckig mit „15“ verbunden – statt mit „50“, was viel logischer wäre: 1000, 100, 10 und 5000, 500, 50.

Was wäre aber dann der passende Name für „15“? „Zehnfünf“, doch so richtig schön ist das auch nicht, und die Verwechslungsgefahr wäre immer noch groß.

Doch man kann ja auch neue Zahlwörter erfinden. Das Französische hat nicht nur eigene Wörter bis zur 12 erfunden wie das Deutsche, sondern immerhin bis 16. Erst die 17 heißt „dix-sept“, also „zehn-sieben.“ Leider hält die französische Sprache diese Logik nicht durch und wird bei den Zehnerzahlen noch viel komplizierter.

Die deutschen Wörter sind da noch einigermaßen nachvollziehbar: zehn, zweizig, dreizig, vierzig, fünfzig, sechszig, siebenzig, achtzig und neunzig. Zugegeben, es heißt zwanzig, dreißig, sechzig und siebzig, aber man kann die Grundform immer noch erkennen – und an dem „z“ sogar, dass es etwas mit den Zehnern zu tun haben muss (clevere Kinder bezeichnen die Zehn dann auch schon mal als Einszig).

Das Französische stellt uns da auf eine härtere Probe: vingt, trente, quarante, cinquante, soixante – das geht ja noch, aber dann: soixante-dix, wörtlich „sechzig-zehn“ für siebzig und quatre-vingt, wörtlich „vier-zwanzig“ für achtzig! Wunderbar dann eine Zahl wie 94: „quatre-vingt-dix-quatre“, „vier-zwanzig-zehn-vier“.

Nun ist Sprache lebendig und entwickelt sich weiter, und so gibt es Gegenden, in denen die Zahlwörter „septante“, „huitante“ und „neufante“ wenigstens umgangssprachlich existieren.

So ist es auch für die deutsche Sprache immerhin denkbar, dass 15 + 50 = 65 einmal „zehnfünf plus fünfzehn gleich sech(s)zehnfünf“ gesprochen wird. Unsere alten Gehirnkreise werden sich damit aber sicher einige Zeit schwer tun.

So genial unser Stellenwertsystem ist, so hat es doch ein Problem nicht gelöst: die wahren Größenordnungen zu veranschaulichen. Das hängt zusätzlich noch mit unserer Unfähigkeit zusammen, uns wirklich große Anzahlen angemessen vorzustellen – es mangelt dabei eindeutig an Redundanz. Mit dem Stellenwertsystem lassen sich zwar theoretisch unbegrenzt große Zahlen darstellen – sie werden aber ziemlich rasch zu seelenlosen Ziffernkolonnen.

Stellen Sie sich bitte einen Zahlenstrahl vor. Der beginnt bei Null, und dann folgen nacheinander alle Ziffern der Reihe nach im gleichen Abstand, so wie bei einem Lineal. Die Null auf diesem Zahlenstrahl befinde sich direkt unter Ihren Füßen, die Zahl eine Million in 10 Metern Entfernung Richtung Westen. Haben Sie diesen Zahlenstrahl vor Ihrem inneren Auge? Ja?

Dann beantworten Sie bitte folgende Frage: Wo befände sich auf diesem Zahlenstrahl die Zahl eine Billion?

Am Ende der Straße? Am Stadtrand? Vielleicht sogar ein paar Kilometer weiter?

Wahrscheinlich haben Sie sich gewaltig verschätzt.

Wenn man die Zahlen aufschreibt, sieht es so aus, als läge eine Million irgendwo in der Mitte zwischen eins und einer Billion:

1; 1 000 000; 1 000 000 000 000.

Gefühlsmäßig empfinden wir die Million sogar eher näher an der Billion als an der Eins. Einen Euro haben wir fast immer in der Tasche, eine Million leider genau so wenig wie eine Billion. Außerdem hören sich die Zahlwörter Million und Billion auch sehr ähnlich an.

Tatsächlich ist die Billion aber dramatisch weiter von der Million entfernt als diese von der Eins.

Eine Billion ist das millionenfache einer Million (das tausendfache einer Million ist eine Milliarde). Ist die Strecke der Länge „eine Million“ 10 Meter lang, ist eine Strecke der Länge „eine Billion“ eine Million mal so lang, also 10 Millionen Meter. Wie lang das ist?

10 000 000 m = 10 000 km. Zehntausend Kilometer Richtung Westen – die Billion befände sich mitten in Amerika!

Könnten wir uns tatsächlich vorstellen, wie „groß“ eine Billion in Wahrheit ist – wir hätten nicht so bedenkenlos Staatsschulden in entsprechender Höhe angehäuft.

Übersetzen wir die Zahlen doch einfach ins Englische, dann klingt es etwas harmloser. Beträgt das geschätzte Vermögen einiger Superreicher nicht auch schon mal „some billion dollars“? Könnte Bill Gates mit einer kleinen Spende sämtliche Schulden der Bundesrepublik tilgen?

Ich glaube mich zu erinnern, in einem Zeitungsartikel einmal gelesen zu haben, dass die Weihnachtsansprache der Queen von bis zu einer Billion Menschen weltweit gehört wird. Eine bemerkenswerte Leistung wenn man bedenkt, dass es keine zehn Milliarden lebende Vertreter der Gattung homo sapiens auf diesem Planeten gibt.

Wie kann das also sein? Die Antwort lautet: Es ist ein simpler Übersetzungsfehler. Tausend Millionen sind eine Milliarde. In English, please: „thousand millions are one milliard.“ Theoretisch. Aber in den USA (und tendenziell unterwandert das American English das British English zunehmend) hieße diese Rechnung: „thousand millions are one billion.“

So ist das: Sie müssen mit Ihrer Milliarde nur in das Land der unbegrenzten Möglichkeiten reisen, und schon sind Sie Billionär. Leider wird dieses Vermögen bei der Rückübersetzung wieder zur Milliarde. Wir haben alle zusammen doch wesentlich mehr Schulden angehäuft, als Bill Gates tilgen könnte. Irgendwie beruhigend und beunruhigend zugleich.

Es ist vrelbüffned, dsas wir desien Txet lseen knnöen, obowhl fsat kien Wrot rcihtig gesricheben ist. Ncah der Lrkteüre von Kepetil 3 ahenn wir acuh, wuarm dsa so ist.

Schön, wenn wir auch die Ziffern auf unseren Kontoauszügen so vertauschen könnten, aber in diesem Fall müssen wir ganz genau sein. Immerhin können wir aber an der ersten Stelle einer Zahl und ihrer Länge schon grob ihren Wert abschätzen. Dass 7453 größer als 2854 ist, erkennen wir, ohne jede Stelle betrachten zu müssen, und auch, dass 24647 größer ist als 7042 sehen wir sofort.

Prompt wird dies in jedem Supermarkt schamlos ausgenutzt:

2,99 Euro ist ja wesentlich billiger als 3,00 Euro und 9,99 Euro ein echter Schnäppchenpreis im Vergleich zu 10,00 Euro.

Stimmt zwar nicht, aber wir fallen immer wieder darauf herein.

Weshalb ist die Multiplikation mit 10 so einfach?

Weil man ja nur eine Null an die Zahl anzuhängen braucht!

Prima, dann multiplizieren wir mal ein bisschen:

5	•	10	=	50
76	•	10	=	760
823	•	10	=	8230
400	•	10	=	4000
0	•	10	=	00
3,5	•	10	=	3,50
76,3	•	10	=	76,30

Wie? Die letzten beiden Aufgaben stimmen nicht?

Ach so: Null heißt ja nichts. Und wenn ich ein Nichts dazutue, dann ändert sich ja nichts – verflixt, warum stimmt das dann aber nicht bei den ersten vier Aufgaben?

Wer die Multiplikation mit zehn mit dem „Anhängen einer Null“ erklärt, hat vermutlich gar nicht verstanden, was wirklich passiert. Eine Multiplikation mit zehn macht z. B. aus Hundertern Tausender, aus Zehnern Hunderter und aus Einern Zehner. Also werden in Wirklichkeit alle Ziffern eine Stelle nach links geschoben. Wird dadurch die Einerstelle leer, muss diese mit dem Platzhalter Null aufgefüllt werden. Wird sie nicht leer – was der Fall ist, wenn die Zahl vor der Multiplikation mit zehn einige Zehntel hatte, denn diese werden dann zu Einern – muss auch nichts „angehängt“ (oder besser gesagt aufgefüllt) werden. Deshalb werden bei 3,5 • 10 die 3 Einer zu 3 Zehnern und die 5 Zehntel zu 5 Einern und das Ergebnis ist 35.

Das Komma ist bei Kommazahlen auch kein Trennzeichen, wie oft falsch vermittelt wird, sondern die Markierung, die anzeigt, wo die Einer stehen. Leider nicht genau auf dem Komma, aber immerhin auf jeden Fall direkt links davon.

Der Spruch „das Komma trennt Euro und Cent“ reimt sich zwar schön, verschleiert aber mehr als er erhellt.

Was trennt das Komma bei 2,50 m? Meter und Zentimeter? Meter und Dezimeter? Und was bei 2,500 m? Und bei 2,5 m? Alle Angaben bedeuten das Gleiche, warum sollte dann das Komma Unterschiedliches trennen (bedeuten)?

Diese „Komma-trennt"-Vorstellung ist auch für viele Rechenfehler mit Kommazahlen verantwortlich.

2,3 plus 22,33 wird dann schnell zu 24,36 oder 0,2 mal 0,3 zu 0,6.

Falls Sie jetzt denken, dass die Ergebnisse doch stimmen, berechnen Sie 2,03 plus 22,33 und 2 mal 0,3.

Sie haben 5678,90 € Schulden? Dann zahlen Sie doch die 90 Cent zurück – und Sie haben keinen Cent Schulden mehr!

Gut, wenn man es genau betrachtet, sind es noch 567800 Cent – aber das nennen Sie dann einfach Peanuts.

Oder Sie sprechen von lächerlichen 0,005678 Millionen.

Noch besser von 0,005678 Mille. Mille ist Französisch und heißt Tausend. Wir kennen es aus dem Wort Promille, das ist ja sooo was Kleines. Nullkommanullnullnochwas Promille, also bitte, das ist ja fast jenseits der Nachweisgrenze! Ob das deutsche Wort „Mille" Tausender oder Millionen meint, kann man sowieso nirgends verbindlich nachlesen.

Durch diesen Sprachtrick können aus über 5000 Euro gefühlte 5 Cent werden.

Es geht auch umgekehrt: Die Legende berichtet davon, dass ein Laborant, der den Eisengehalt von Spinat untersuchte, beim Übertrag seiner Messergebnisse in eine Tabelle das Komma an die falsche Stelle gesetzt hat und dadurch einen zehnmal so hohen Eisengehalt angegeben hat, wie das tatsächlich der Fall war. Heerscharen von Kindern wurde gewaltsam der wundersame grüne Brei eingetrichtert, und dabei wogen die psychischen Schäden vermutlich mehr als der so maßlos überschätzte Nutzen.

Vielleicht würden die Hürden für solche Schiebereien etwas höher gelegt, würde man die Einerstelle nicht durch ein nachgestelltes Komma markieren, sondern dadurch, dass man sie einrahmt. Das sieht nicht gut aus? Stimmt. Für das Komma in der gebräuchlichen Form spricht mehr die Ästhetik als die Logik.

Eine Kommazahl erweckt allein durch ihr Aussehen oft den Eindruck, als wäre das Komma so etwas wie eine „Spiegelachse": an der dritten Nachkommastelle stehen die Tausendstel und an der dritten Stelle vor dem Komma die Tausender?

Halt, falsch, dort stehen die Hunderter!

Es gibt zwar Tausender und Tausendstel, Hunderter und Hundertstel sowie Zehner und Zehntel, aber nur Einer – und keine Eintel.

Es sei denn, um beim Bruchrechnen einfache Aufgaben in Monster zu verwandeln, damit sie für geheimnisvolle Rezepte passend aufbereitet werden.

Dass vier Halbe nichts anderes als zwei Ganze sein können, ist jedem Achtjährigen klar. Diese Klarheit lässt sich einige Jahre später erfolgreich beseitigen, wenn man die Lösung der Aufgabe 4 • ½ so vorführt:

$$4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

und dazu „erklärt":

„Wandle die Vier um in vier Eintel, multipliziere, kürze dann und schreibe die zwei Eintel als zwei Ganze. Ich könnte auch schon auf dem Bruchstrich kürzen (aber Vorsicht, bei Summen dürfte ich das nicht, denn Summen kürzen nur die Dummen!) und erhielte hier zwei mal eins durch ein mal eins und dann gleich zwei Eintel, also zwei.“

Wenn man Mathematik ver-stehen will, braucht man nicht so viele Er-Klärungen, sondern mehr individuelle Ich-Klärungen.

Grundrechenarten: Ganz einfach?

Plus ist einfach. Beate hat die Telefonnummer 222222 und Alice die Telefonnummer 444444. Wenn ich beide anrufen möchte, wähle ich einfach 666666. Oder?

In die Stadt fahre ich mit Bus Nr. 24 und dann noch mit Bus Nr. 11. Weshalb also nicht gleich in die 35 steigen?

Frau Schätzle aus Nummer 43 wundert sich über die beiden Briefe in ihrem Briefkasten: an Herrn Wolf aus Nummer 13 und Frau Remmers aus Nummer 30!

Clemens hat eine 2 und eine 3 geschrieben und rechnet fest mit einer 5 im Zeugnis.

Zahlen begegnen uns im Alltag oft als Nummern. Mit Nummern zu rechnen führt selten zu brauchbaren Ergebnissen (übrigens wird die Rechnerei mit Noten kaum besser, wenn der „Durchschnitt“ gebildet wird, auch wenn das allgemein so üblich ist).

Aber auch Rechnungen mit Zahlen in anderen Funktionen können zu unpassenden „Lösungen“ führen.

Am Zahlenstrahl kann man die Addition als ein Vorwärtshüpfen erklären. 17 plus 3 heißt dann ich stehe auf der 17 und hüpfe 3 weiter nach vorne. Wo lande ich? Auf der 20. Mathe ist leicht.

Sie stehen in der Schlange vor der Kinokasse an 17. Stelle.

Sie rücken 3 Stellen nach vorne. Hüpf, hüpf, hüpf; 18, 19, 20?

Von wegen! Nun sind Sie 14. Mathe ist doof.

Dann eben so: Sie kopieren drei aufeinander folgende Seiten in einem Buch und beginnen mit Seite 17. Kopier, kopier, kopier; letzte kopierte Seite: 20? Nein, Seite 19! Verflixt!

Dann rechnen wir eben mit handfesten Gewichten. 17 plus 3 heißt… also… Mein Hund wiegt 17 Kilo und nimmt 3 Pfund zu, dann…

Es ist 17 Uhr und 3 Minuten. Wir sind 17 Leute und zählen auf drei.

Letzte Chance: Wir werfen 17 Heuhaufen und drei Heuhaufen zusammen. Wie viele Heuhaufen erhalten wir? Genau: Einen!

Also ist 17 + 3 = 20 oder 14 oder 19 oder 18 einhalb oder keine Ahnung was oder eins?

Ja, natürlich, 17 + 3 ist 20 und sonst nichts. Dennoch viel Spaß bei der genauen Erklärung, weshalb die anderen Ergebnisse falsch sind!

Wenn wir annehmen, „plus“ hieße einfach „dazuzählen“, so trifft das in doppeltem Sinn nicht zu: Es gibt Situationen, da „zähle ich dazu“ und kann auch Zahlen erkennen, aber es lässt sich daraus nicht ohne weiteres eine Plusaufgabe mit diesen Zahlen erstellen. Umgekehrt gibt es

Situationen, die durch eine Addition beschrieben werden können, ohne dass etwas „dazugezählt“ wird.

Unter den oben aufgeführten Situationen kann man Beispiele für beides finden.

Die meisten „falschen“ Ergebnisse lassen sich logisch nachvollziehen und wirken dann gar nicht mehr so falsch.

Ein weiteres Beispiel:

Die Aufgabe 5 + 3 kann so veranschaulicht werden:

0 1 2 3 4 **5** 6 7 **8** 9

Die 5 ist dabei eine Position auf dem Zahlenstrahl, die 3 bedeutet die Anzahl der Einersprünge und das Ergebnis 8 ist wieder eine Position auf dem Zahlenstrahl. Auf diesem Strahl steht auch die 3 – aber die kommt bei der Veranschaulichung gar nicht vor.

Wie sieht das Bild aus, wenn man sich 5 und 3 gleichermaßen als Positionen vorstellt?

0 1 2 **3** 4 **5** 6 7 8 9

Sehen Sie, dass jetzt 5 + 3 das Ergebnis „4“ nahe legt? Und erzählt die Lehrerin nicht auch vor den Zeugnissen, dass eine 5 und eine 3 zusammen eine 4 ergeben?

Minus heißt wegnehmen. Niklas ist 9 Jahre alt, seine Schwester Katrin 5 Jahre. Wie berechnet man den Altersunterschied? Man rechnet 9 minus 5. Wer nimmt jetzt hier wem etwas weg?

Das Ergebnis einer Minusaufgabe heißt „Differenz“. „Differenz“ heißt so viel wie „Unterschied“. Endlich eine nachvollziehbare Erklärung! Man kann sich ja sogar bei der Situation „von 3 Äpfeln werden 2 weggenommen“ den übrig bleibenden Apfel als „Unterschied“ zwischen den am Anfang vorhandenen und den weggenommenen Äpfeln vorstellen.

Vieles, was uns eindeutig erscheinen mag, ist in Wirklichkeit äußerst vieldeutig.

Kleine Aufgabe: Finden Sie 3 verschiedene Minusaufgaben in folgendem Bild:

☻ ☻ ☻ ☺ ☺ ☺ ☺

und denken Sie daran, dass bei jeder Aufgabe alle drei Zahlen erkärt werden müssen. Dabei wird jedoch nie etwas weggenommen.

7 – 4 = 3 (von 7 Smilies sind 4 weiß. Wie viele sind nicht weiß?)

7 – 3 = 4 (von 7 Smilies sind 3 nicht weiß. Wie viele sind weiß?)

4 – 3 = 1 (4 Smilies sind weiß, 3 sind schwarz. Wie groß ist die Differenz zwischen der Anzahl der weißen und der der schwarzen?).

Bedeutet minus am Zahlenstrahl ein Zurückhüpfen, so hat man damit das gleiche Problem wie beim Vorhüpfen bei der Addition. Am Zahlenstrahl hüpfe ich von der 3. Zahl zur 1. **zurück**, in der Warteschlange wandere ich von der 3. Stelle durch geduldiges Warten auf Position 1 nach **vorne**.

Viele Kinder rechnen mit den Fingern und kommen systematisch zum falschen Ergebnis. 5 minus 4? Machen Sie es nach: 5 sind die Finger der rechten Hand. Jetzt zählen Sie die „minus vier“, ohne die Finger einzuklappen. Eins: Daumen, zwei: Zeigefinger, drei: Mittelfinger, vier: Ringfinger. Und das Ergebnis? Wahrscheinlich ist Ihnen jetzt klar, dass diese Kinder bei 5 minus 4 zu dem Ergebnis 2 kommen – aber können Sie jetzt ganz schnell erklären, was dabei schief läuft?

Sie laufen bei einem Wettlauf mit. Sie sehen vor sich den Drittplatzierten. Sie überholen ihn. Geschafft! An welcher Position sind Sie nun? Nein, Sie sind nicht Zweiter. Denken Sie mal darüber nach.

In einer Kiste liegen 12 Bälle. Die Kiste wird umgekippt, und alle Bälle bis auf 4 kullern heraus. Wie viele Bälle sind noch in der Kiste?

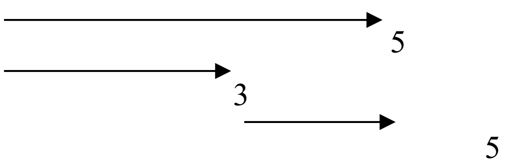
Fast automatisch beginnen wir mit der Rechnung 12 – 4. Haben Sie auch sofort gesehen, dass noch 8 Bälle in der Kiste sind? Das ist leider falsch, denn wenn alle bis auf 4 herausgekullert sind, dann sind natürlich noch genau diese 4 Bälle drin.

Sehr oft spielen uns sprachliche Begriffe einen Streich, wie auch bei der folgenden Geschichte:

Katja hat 6 Murmeln, Leon hat 5 Murmeln. Katja gibt 3 Murmeln ab, Leon 2 Murmeln weniger. Wie viele Murmeln hat Leon? Na?

Auch Vorstellungen von Zahlen als Positionen können bei der Subtraktion gewaltig in die Irre führen:

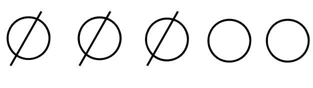
Die 5 ist die Position am Ende des Fünferpfeils, die 3 die Position am Ende des Dreierpfeils. Wir „nehmen“ bei der Operation minus drei den Dreierpfeil „weg“. Was bleibt? Ein „abgebrochener“ Pfeil, der aber immer noch auf die 5 zeigt!



Und weshalb 8 minus 8 sieben sein kann, ist mit Hilfe folgender Skizze auch ganz gut erkennen:

Mit dem Durchstreichen ist das sowieso so eine Sache. In dem äußerst lesenswerten Buch „Kinder und Mathematik“ von Hartmut Spiegel und Christoph Selter kommt jemand zu Wort, den das nahezu traumatisiert hat. Sinngemäß heißt es dort:

Die Lehrerin hat die Kreise halbiert. Und dann hat sie einfach behauptet, die seien nicht mehr da!



Sie sehen doch sicher auch ein, dass hier oben 6 • ½ + 2 = 5 gezeichnet wurde und nicht 5 – 3 = 2?!

Noch ein wenig verzwickter ist die Sache mit der Multiplikation. In vielen Situationen sind die Faktoren (das sind die Zahlen, die multipliziert werden) nicht gleichberechtigt, obwohl man die Zahlen mathematisch korrekt immer vertauschen darf (das nennt man das „Kommutativgesetz“, was übersetzt einfach „Vertauschungsgesetz“ bedeutet).

Relativ problemlos ist es noch, wenn man eine Anzahl „strukturiert“, das heißt in Reihen und Spalten geordnet, darstellt:

● ● ● ● ●

● ● ● ● ●

● ● ● ● ●

In diesem Bild sehe ich je nach Perspektive drei mal fünf Punkte (in einer Reihe) oder fünf mal drei Punkte (in einer Spalte).

Doch schon bei einer kleinen Änderung der Anordnung wird es ungleich schwieriger, „fünf mal drei Punkte“ zu sehen. Probieren Sie es aus!

● ● ● ● ●   ● ● ● ● ●   ● ● ● ● ●

Sollten Sie daraus nun aber schließen, dass zu diesem Bild jetzt „eindeutig“ die Aufgabe 5 + 5 + 5 oder 3 • 5 passt, muss ich Sie enttäuschen.

Ich habe Kindern Multiplikationen mit Plättchen auf unterschiedliche Weise gezeigt und gebeten, die entsprechenden Malaufgaben aufzuschreiben. Dabei erhielt ich ein verblüffendes Resultat: Egal, ob ich die Plättchen gleichzeitig zeigte oder nacheinander, egal wie ich sie anordnete und färbte (natürlich immer so, dass eine Malaufgabe klar erkennbar war) – immer sahen einige Kinder auch die Umkehraufgabe. Ich legte 4 blaue Plättchen hin, nahm diese wieder weg und legte dann 4 gelbe Plättchen hin. Auch diese nahm ich weg, legte 4 grüne Plättchen hin und nahm sie wieder weg. Welche Aufgabe hatten die Kinder aufgeschrieben? Die meisten schrieben 3 • 4. Ich hatte ja drei mal je vier Plättchen hingelegt. Doch stets waren Kinder dabei, die 4 • 3 hingeschrieben hatten. Sprachlich müsste ich das wohl übersetzen in „4, drei mal“. Tatsächlich waren doch auch als erstes vier Plättchen zu sehen!

Aber selbst wenn wir die Multiplikation im Kopf leicht umdrehen können, ist die Reihenfolge der Faktoren nicht gleichgültig für die inneren Bilder, die mit der Multiplikation verknüpft werden können.

Multiplizieren am Zahlenstrahl ist nicht sehr hübsch. Man muss immer bei der Null anfangen zu hüpfen. Das hätte man vielleicht auch bei der Addition machen sollen, denn so könnte man 5 + 3 = 8 auch erklären als 5 Hüpfer und 3 Hüpfer sind zusammen 8 Hüpfer und da landet man auch. Aber dann muss man bei 3 • 2 „drei mal zwei mal hüpfen“ um insgesamt sechs mal gehüpft zu sein und auf der sechs zu landen. Da kann man sehr leicht ins Stolpern geraten.

Oder man macht drei Zweierhüpfer, die fühlen sich aber anders an als zwei Dreierhüpfer, und überhaupt bin ich kein Känguru und außerdem multiplizieren Beuteltiere sowieso nicht.

Bleibt wieder die Multiplikation mit Größen. 3 kg mal 2 kg sind – Moment mal, was heißt hier „2 kg mal 3 kg“? 2 mal 3 kg sind 6 kg (3 kg links auf die Hantel, 3 kg rechts auf die Hantel und los geht’s), 2 kg mal 3 sind auch 6 kg (ich nehme 2 kg zu und noch mal 2 kg zu und noch mal 2 kg zu – aber war das nicht eigentlich 3 mal 2 kg? Zum Glück ist das ja das Gleiche. Auf jeden Fall bin ich 6 kg schwerer geworden). 2 kg mal 3 kg, also, meine Hantelstange wiegt 2 kg und die Scheiben 3 kg und ich hebe die 2 mal 3 mal hoch und dann habe ich 6 mal 6 kg – halt, Blödsinn, das ergibt keinen Sinn. Genau so wenig wie 2 kg mal 3 kg. Ein Mathematiker kann mir zwar sagen, dass das Ergebnis von 2 kg mal 3 kg 6 Quadratkilogramm sind, aber was das sein soll, weiß er normalerweise auch nicht.

Tue dies, tue das – aber weshalb?

Zur Zeit des Adam Riese (eigentlich Adam Ries, um 1492 − 1559) war es möglich, seinen Lebensunterhalt damit zu verdienen, dass man größere Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen auf einem Blatt Papier durchführen konnte.

Die Künste der mittelalterlichen „Rechenmeister“ lernen unsere Kinder heute im Wesentlichen in der dritten und vierten Klasse − neben einigem andern.

Das schriftliche Rechnen ist äußerst raffiniert: es stützt sich auf die stellenweise Analyse der Ziffern und hantiert mit diesen wie mit den einstelligen Zahlen. Da die Ziffern aber für ganz unterschiedliche Zahlen stehen können, muss gleichzeitig immer auch der Stellenwert der Ziffer berücksichtigt werden. Das wird immer dann besonders knifflig, wenn zusätzlich Überträge in andere Stellenwerte notwendig werden.

Es ist möglich, die Regeln für das schriftliche Rechnen wie ein Schritt für Schritt nachzuvollziehendes „Kochrezept“ aufzuschreiben, und tatsächlich wurde das im Mittelalter genau so praktiziert. Leider sind die Methoden so komplex, dass kleinste Abweichungen zu empfindlichen Störungen führen. Für Computer, die penible Schritt-für-Schritt-Anweisungen (man nennt so was auch „Algorithmen“) abarbeiten können, kein Problem – für unser vernetzt arbeitendes Gehirn indes schon.

Zu jedem möglichen Rechenverfahren den genauen Algorithmus aufzuschreiben, wäre langwierig und würde schnell langweilig werden. Die meisten Erwachsenen haben die Verfahren längst automatisiert und können sie herunterspulen, ohne über ihren Sinn nachzudenken.

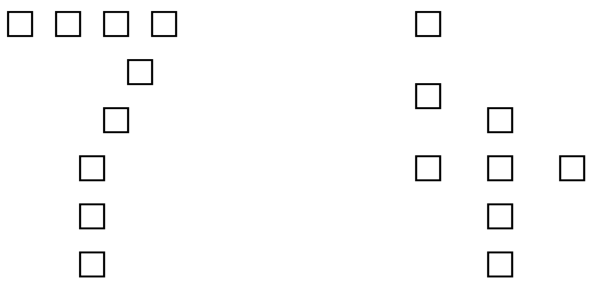
Fatal wäre es aber, wenn man versuchen würde, sie auch Kindern gleich mechanisch zu vermitteln. Hinter jedem Verfahren stecken subtile Konstruktionen und Bedeutungen, die man sich beim Lernvorgang erarbeiten und erschließen muss. Das ist weder banal noch einfach, und eine genaue Aufschlüsselung würde etliche Seiten füllen.

Die Vorstellung, jede(r) könne dies allein schon deswegen gut vermitteln, weil er oder sie es selber kann, ist ziemlich abwegig. Über ein Vormachen – Nachmachen dürfte man kaum hinauskommen, und das hat weniger mit Lernen zu tun als mit Dressur. Wer glaubt, um beispielsweise ein guter Grundschullehrer zu sein, brauche man vor allem „pädagogisches Geschick“ (und der Rest sei nebensächlich), müsste sich mit der gleichen Logik auch bevorzugt von jemandem mit ruhigen Händen den Blinddarm entfernen lassen (und es als nebensächlich empfinden, ob es sich hierbei um einen Uhrmacher oder einen Chirurgen handelt).

Warum größer auch kleiner sein kann

Eine Studentin der PH Freiburg untersuchte Realschüler der 5. Klasse, bei denen der Verdacht auf Rechenschwäche bestand. Dabei befragte sie ein Mädchen, ob dieses mit Hilfe von quadratischen Pappkärtchen zeigen könne, dass „sieben größer als vier“ sei. Man sollte annehmen, das sei für eine Realschülerin eine unterfordernd leichte Aufgabe: Hier sieben Kärtchen, darunter vier Kärtchen, und, ganz klar: in der oberen Reihe liegen drei Kärtchen mehr…

Umso verblüffender der Lösungsvorschlag des Mädchens:



Sieben ist größer als vier, weil man zum Legen von „7“ neun Kärtchen, zum Legen von „4“ hingegen nur acht Kärtchen braucht.

Man schreibt 7 > 4 und liest „7 ist größer als 4“.
Aber was meint man damit?

Bevor wir diese Frage näher untersuchen, bearbeiten Sie doch bitte folgende Aufgabe:

Welche dieser beiden Zahlen ist größer:

7 **4**

Diese Aufgabe hat einen wesentlich ernsteren Hintergrund als man auf den ersten Blick vermuten würde.

Da unser Gehirn immer bestrebt ist, sinnvolle Verknüpfungen zu nutzen, wird durch den Begriff „größer“ auch eine Vorstellung von räumlich-körperlicher „Größe“ aktiviert. Das hat zur Folge, dass wir tatsächlich messbar länger brauchen, die Frage nach der größeren Zahl zu beantworten, wenn diese kleiner geschrieben ist.

Streng genommen wurde nie wirklich nach der „kleineren“ Zahl gefragt. 4 ist eigentlich nicht „kleiner“ als 7.

Falls ich mir die Zahlen als Anzahlen vorstelle, kann ich sagen „vier sind **weniger** als sieben“.

Stelle ich mir die Zahlen als Reihe vor, dann liegt „vier **vor** der sieben“.

Als Nummer kann ich von einer **niedrigeren** (z. B. Startnummer) sprechen; ansonsten könnte ich tatsächlich das Lineal zur Hilfe nehmen, um die Frage nach der Größe zu beantworten. Eventuell entstehen vor meinem inneren Auge auch das Bild einer „großen“ Villa mit Hausnummer 4 und eines kleinen Häuschens mit der Nummer 7 (oder umgekehrt).

Nur Mut!

Die gesamte Mathematik, die bis in die Mittelstufe gelehrt wird, kann mit Hilfe von Modellen erfahr- und nachvollziehbar gemacht werden.

Dass dabei von „fahren“ und „ziehen“ die Rede ist, ist kein Zufall: Man muss sich selbst auf diesen Weg begeben und sich manchmal auch ein wenig anstrengen. Es gibt „verfahrene“ Situationen, es ist möglich, sich zu „verfahren“, und nicht immer steht einem ein „Verfahren“ zur Verfügung, mit dem man ein Problem schnell lösen kann.

Nicht jedes Modell passt in jeder Situation, meistens sind die Modelle und die Situationen mehrdeutig, und wer nach Patentrezepten sucht, wird oft enttäuscht werden.

Aber immerhin ist es möglich, die Mathematik zu verstehen und nicht nur auswendig zu lernen. Zum Verständnis gehört eben auch dazu, dass es manchmal ganz normal ist, wenn man mit einigen Begriffen, Regeln und Zusammenhängen so seine Probleme hat.

Sich dessen bewusst zu sein und sich dadurch nicht entmutigen zu lassen ist schon ein großer Schritt in die Richtung, an Mathematik nicht nur nicht zu verzweifeln, sondern auch ein wenig Spaß an ihr finden zu können. Deswegen muss man nicht gleich Mathematiker werden, aber mathematisches Verständnis einschließlich der Fähigkeit, elementare Mathematik betreiben zu können ist eine der wichtigsten „Schlüsselqualifikationen“ in unserer modernen Gesellschaft.

Es gibt sehr viele Lehrer, die ihren Beruf professionell und mit Herz ausüben, und diese verdienen höchstes Lob und Anerkennung.

Leider gibt es aber auch Lehrer, die nicht sonderlich für ihren Beruf taugen. Für Lehrer, die Mathematik unterrichten, gibt es zwei Kategorien schlechter Lehrer.

Es geht dabei nicht darum, dass Lehrer etwas „beibringen“ können müssen. Lehrer sind keine Kellner, bei denen man eine Bestellung aufgeben und diese bei Nichtgefallen wieder zurückgeben kann. Lehr- und Lernprozesse sind keine Dienstleistungen mit der „Ware Bildung“ und dem „Kunden Schüler“. Wer so argumentiert, zeigt in erster Linie, dass er nicht viel von Lernprozessen versteht.

Die zwei Kategorien beziehen sich auf Einstellungen und Fähigkeiten der Lehrer, die im Rahmen der Professionalisierung durchaus angeeignet und auch evaluiert werden können.

Kategorie eins:

Der Lehrer hat eigentlich überhaupt keine Ahnung von den fachlichen Zusammenhängen. Er unterrichtet das, was im Buch steht, ohne wirklich zu wissen, welche Bedeutung dahinter steckt. Problemen der Schüler begegnet er verständnisvoll; schließlich hat er Kinder lieb und findet Mathematik auch gar nicht so furchtbar wichtig. Zur Differenzierung erklärt er den schwächeren Kindern alles fünf Mal und lässt sie die einfacheren Aufgaben „nach Rezept“ rechnen. Das Ziel „Hauptsache keine Fünf im Zeugnis“ hält er in diesen Fällen für „ausreichend“.

Kategorie zwei:

Der Lehrer verkündet in nahezu jeder Mathematikstunde, dass Mathematik ganz logisch und einfach sei (und wer die Mathematik nicht kapiert, muss etwas dumm oder faul sein und gehört im Zweifelsfall nicht auf diese Schule). Für Schwierigkeiten hat er kein Verständnis, er hat schließlich gelernt, wie die Mathematik „geht“ (und zwar weit über das hinaus, was an der Schule unterrichtet wird) und zeigt das denen, die es wissen wollen, auch. Wer trotzdem schlechtere Noten als „befriedigend“ verdient, mit dem kann er keinesfalls zufrieden sein.

Ganz übel ist es, einen Lehrer der Kategorie eins in der Grundschule zu erwischen und einen der Kategorie zwei in der weiterführenden Schule. Dann lernt man erst, dass Mathematik ein seltsames Regelwerk ist und dann, dass man eigentlich zu unbegabt dafür ist.

Dabei ist Mathematik der Spielplatz des menschlichen Geistes schlechthin. Jeder Mensch ist ein „Mathematiker", sobald er sich mit Strukturen und Mustern in seiner Welt beschäftigt. Das Rechnen und „Produzieren" von Ergebnissen ist nur ein kleiner und bei weitem nicht der wichtigste Teil der Mathematik.

Genau so wenig wie man eine Fremdsprache durch das Büffeln von Vokabeln lernen kann, kann man Mathematik durch das Büffeln von Definitionen, Regeln, Sätzen und Beweisen lernen.

Doch genau so wie Sie eine Sprache nicht perfekt beherrschen müssen, um sie anzuwenden (und dabei ständig dazulernen), können Sie sich mathematisch betätigen. Glauben Sie nur nicht, dass den Experten die eleganten Beweise und zweckmäßigen Verfahren einfach so eingefallen sind. Zu jeder gedruckten Seite mit mathematischem Inhalt gehören etliche Seiten mit Versuchen und Irrtümern, Halbfertigem und Unrichtigem – die wir aber nie zu sehen bekommen. Ohne Fehler kann man kaum klüger werden, aber niemand will seine Fehler zugeben, um nicht als dumm dazustehen.

Dabei trifft folgende Weisheit ins Schwarze:

Dumme Leute wiederholen immer die selben Fehler.

Kluge Leute machen ständig neue.

Um Mathematik zu lernen, muss man ausprobieren und Fehler machen dürfen. Man muss sich austauschen und abstimmen, miteinander kommunizieren und Fragen stellen.

Dabei können Experten behilflich sein, nicht so sehr, indem sie erklären und zeigen „wie es geht" oder indem sie versuchen, den Lernvorgang bis ins letzte Detail zu steuern, sondern indem sie die richtigen Fragen stellen, hilfreiche Medien zur Verfügung stellen, beobachten und zuhören, behutsam Informationen und eigene Strategien in die Diskussion und den Lernprozess mit einbringen.

Sich hierauf einzulassen, kann äußerst spannend und auch fruchtbar sein. Spannungsgeladen und furchtbar kann es nur werden, wenn man den Lehr- und Lernprozess als ein Modell von Sender und Empfänger missversteht.

„Das geht doch so" – „Aber so habe ich es gelernt, nur so ist es richtig!" wird sehr schnell zu einer Frage von Macht und Rechthaben, bei der die eigentliche Sache zunehmend unwichtig wird.

„Wie machst du das?" – „Ich mache das so!" – „Wie wollen wir es machen?" sind die besseren Ansätze, die freilich auch ein wohlwollendes Zuhören auf beiden Seiten voraussetzen, um weiter führen zu können.

Verabschieden wir uns von der Illusion, alles bis ins Detail zu steuern und optimieren zu können, ohne in eine fatalistische Alles-egal-Mentalität abzudriften. Wenn wir uns bemühen, die Hintergründe für uns selbst und andere Lernende zu erhellen und die Zeit nehmen, das Terrain zu erkunden und erkunden zu lassen, dann gehören die abschließenden Zitate hoffentlich bald der Vergangenheit an:

„Ich hätte vieles erklären wollen, hätte ich es nur selbst verstanden!"

„Ich hätte vieles verstanden, hätte man es mir nur nicht andauernd zu erklären versucht!"